syria math

السنة: الرابعة اختصاص: تحليل وجبر

الفصل: الأول

التاريخ: 03/11/2013

كلية العلوم قسم الرياضيات - جامعة دمشق

المقرر: منطق رياضي

المحاضرة: (8)

تهيد:

سنستخدم الرمز lpha(x,y,z)=(x+y>z) والذي يعبر عن دالة (علاقة) بعدة متحولات مثل lpha(x,y,z)=(x+y>z) بثلاث متحولات ..

دالة بـ n متحول أو نكتب اختصاراً $f(x_i)$ أو $f(x_i)$ أو $f(x_i)$ أو نكن نعرف كم عدد $f(x_1,x_2,...,x_n)$ دالمتحولات .

 $\exists x_i \; lpha(x_i)$ والترميز $\forall x_i \; lpha(x_i)$ والترميز

 $orall x_1, x_2, x_3$ مثلاً إذا كانت (x_1, x_2, x_3) عندئذٍ الترميز $\alpha(x_i)$ عندئذٍ الترميز $\alpha(x_i) = \alpha(x_1, x_2, x_3)$ نعني به $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ والذي يعني أن $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ عندئذٍ الترميز والذي يعني أن

قوانين ونهاذج (قواعد Rules) في المكممات

بدیهیات:

$$\mathcal{L}_{1} : \alpha(x_{i}) \Longrightarrow \exists x_{i} \ \alpha(x_{i})$$

$$\mathcal{L}_{2} : \forall x_{i} \ \alpha(x_{i}) \Longrightarrow \alpha(x_{i})$$

$$\mathcal{R}_{1} : \frac{\alpha(x_{i}) \Longrightarrow \psi}{\exists x_{i} \ \alpha(x_{i}) \Longrightarrow \psi}$$

$$\psi \Longrightarrow \alpha(x_{i})$$

$$\mathcal{R}_2: \frac{\psi \implies \alpha(x_i)}{\psi \implies \forall \ \alpha(x_i)}$$

. في \mathcal{R}_2 و \mathcal{R}_2 الشرط أنَّ ψ لا يحوي المتحول \mathcal{R}_2 كمتحول حر

$$\mathcal{R}_3: \frac{\alpha(x_i)}{\forall \ \alpha(x_i)}$$

في \mathcal{R}_3 لا تفهم على أنها $\alpha(x_i)$ \Rightarrow \forall $\alpha(x_i)$ لكن معناها أنه إذا كان $\alpha(x_i)$ صحيحة فإن $\alpha(x_i)$ صحيحة.

 $(\mathcal{R}_3$ البرهان: (برهان

، لتكن eta اسنادية لا تحوي χ_i كمتحول حر

 $(\ (eta \Rightarrow eta) = (
abla eta \lor eta) = exttt{T}$ إن $eta \Longrightarrow eta$ صحيحة (من المنطق الكلاسيكي

الموقع الإلكتروني: Syria Math



$$ig(extsf{T} \Longrightarrow Aig) = A$$
کما أنَّ $ig(ig(eta \Longrightarrow etaig) \Longrightarrow lpha(x_i)ig) = lpha(x_i)$ من المنطق الكلاسيكي $ig(eta \Longrightarrow etaig) \Longrightarrow lpha(x_i)$ ومنه $ig(eta \Longrightarrow etaig) \Longrightarrow lpha(x_i)$ صحيحة.

: وحيث
$$\chi_i$$
 وحيث $\psi=\left(eta\Longrightarroweta
ight)$ لا يحوي المتحول χ_i كمتحول حر

. محيحة
$$ig(eta \Longrightarrow etaig)\Longrightarrow orall \ lpha(x_i)$$

، محيح
$$(eta \Longrightarrow eta) \Longrightarrow orall \; lpha(x_i)$$
 محيح $(eta \Longrightarrow eta)$ محيح لدينا

. فحسب قاعدة النزع نجد أن $\forall \, \alpha(x_i)$ صحيحة. وبذلك يتم المطلوب

$$\mathcal{L}_3: \forall x_i \ \alpha(x_i) \Longrightarrow \forall x_j \ \alpha(x_j)$$

الرهان:

$$\forall x_i \; \alpha(x_i) \Longrightarrow \; \alpha(x_i)$$
 حسب \mathcal{L}_2 نجد

و واحد) و
$$lpha(x_i)$$
 و $lpha(x_i)$ و $lpha(x_i)$ و مزان لشيء واحد) و صحيحة (يمكن تغيير الدليل وكأنه دليل صامت ، بمعنى أن

حسب خاصية التعدي نجد أنَّ
$$lpha(x_i) \Longrightarrow lpha(x_i)$$
 صحيحة.

و حيث
$$\psi$$
 لا يحوي χ_j كمتحول حر ، نجد: \mathcal{R}_2 حسب \mathcal{R}_3

. وبذلك يتم المطلوب $orall x_i \; lpha(x_i) \Longrightarrow orall x_j \; lpha(x_j)$

$$\mathcal{L}_4: \exists x_i \ \alpha(x_i) \Longrightarrow \exists x_i \ \alpha(x_i)$$

البرهان:

$$lpha(x_i) \Longrightarrow \exists x_i \; lpha(x_i)$$
 حسب \mathcal{L}_1 حسب

و
$$\alpha(x_i) \Longrightarrow \alpha(x_i)$$
 صحيحة

$$lpha(x_i) \Longrightarrow \exists x_i \; lpha(x_i)$$
 حسب التعدي

من
$$\mathcal{R}_{i}$$
 وحيث $\psi=\exists x_{j} \ lpha(x_{j})$ کمتحول حر ، نجد:

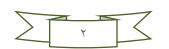
$$\exists x_i \ \alpha(x_i) \Longrightarrow \exists x_i \ \alpha(x_i)$$

ملاحظة : إن مهمة \mathcal{L}_3 و \mathcal{L}_4 هي تغيير الدليل

$$\mathcal{L}_5: \exists x_i \neg \alpha(x_i) \Longrightarrow \neg \forall x_i \ \alpha(x_i)$$

. يكن أن نكتب α تابعة لمتحول واحد $\exists x \ \neg \alpha(x) \Rightarrow \neg \forall x \ \alpha(x)$ يكن أن نكتب الجنب أي يمكن إزالة الدليل على أي يمكن إزالة الدليل على الجنب أن تكتب

. $\exists x \neg \alpha \Longrightarrow \neg \forall x \; \alpha$ کما یکن کتابتها علی الشکل





البرهان:

حسب
$$\mathcal{Y}$$
 نجد $\frac{\forall x_i \ \alpha(x_i)}{p}$ $\Rightarrow \underbrace{\forall x_j \ \alpha(x_j)}_q$ نجد \mathcal{L}_3 حسب \mathcal{L}_2 نجد \mathcal{L}_2 نجد \mathcal{L}_3 نجد روز در ما

وحسب قاعدة التعدي
$$\Big(ig((p\Longrightarrow q)\land (q\Longrightarrow r)ig)\Longrightarrow (p\Longrightarrow r)\Big)$$
 ومن ثم النزع يكون

محيحاً. صحيحاً
$$\forall x_i \ \alpha(x_i) \Longrightarrow \ \alpha(x_j)$$

لدينا الآن
$$\underbrace{((p\Rightarrow r)\equiv (\neg r\Rightarrow \neg p))}_p$$
 صحيحاً ، وحسب المنطق الكلاسيكي $\underbrace{\forall x_i \ \alpha(x_i)}_p\Rightarrow \underbrace{\alpha(x_j)}_r$ نجد

$$\neg \alpha(x_i) \Longrightarrow \neg \forall x_i \ \alpha(x_i)$$

$$\exists x_j
eg lpha(x_j) \Longrightarrow
eg \forall x_i \; lpha(x_i)$$
 وحسب \mathcal{R}_1 وحيث $\psi =
eg \forall x_i \; lpha(x_i)$ لا يحوي $\psi =
eg \forall x_i \; lpha(x_i)$ وحيث \mathcal{R}_1

$$\exists x_i
eg lpha(x_i) \Longrightarrow \exists x_j
eg lpha(x_j)$$
 اوالآن حسب \mathcal{L}_4 نجد

$$\exists x_i \neg lpha(x_i) \Longrightarrow \neg \forall x_i \ lpha(x_i)$$
 ومنه حسب قاعدة التعدي نجد:

نتيجة:

إن
$$lpha(x_i)$$
 اسنادية فنفيها $eta(x_i)$ اسنادية كذلك، لذا بتبديل كل $lpha(x_i)$ ب $lpha(x_i)$ في الجملة الأخيرة نجد: $\exists x_i \; lpha(x_i) \Longrightarrow \neg \forall x_i \; \neg lpha(x_i)$

$$\mathcal{L}_6: \neg \exists x \ \neg \alpha(x) \Longrightarrow \forall x \ \alpha(x)$$

البرهان:

$$lpha(x_j)\Rightarrow\exists x_j\ lpha(x_j)$$
 نجد: \mathcal{L}_1 نجد: $\exists x_j\ lpha(x_j)\Rightarrow\exists x_i\ lpha(x_i)$ نجد: $\alpha(x_j)\Rightarrow\exists x_i\ lpha(x_i)$ نجد: $\alpha(x_j)\Rightarrow\exists x_i\ lpha(x_i)$ نجد: $\alpha(x_j)\Rightarrow\exists x_i\ lpha(x_i)$ نجد: $\alpha(x_j)\Rightarrow((p\Rightarrow q)\equiv(\neg q\Rightarrow \neg p))$ نجد: $\alpha(x_j)\Rightarrow((p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow \neg p))$ نجد: $\alpha(x_i)\Rightarrow((p\Rightarrow q)\Rightarrow(\neg q\Rightarrow \neg p))$ نجد: $\alpha(x_i)\Rightarrow((x_i)\Rightarrow \neg a(x_j))$ وحیث: $\alpha(x_i)\Rightarrow((x_i)\Rightarrow \forall x_i\neg \alpha(x_i))$

$$eg \exists x_i \ \alpha(x_i) \Longrightarrow \forall x_j \neg \alpha(x_j)$$
 وحسب \mathcal{L}_3 نجد \mathcal{L}_3 نجد \mathcal{L}_3 نجد \mathcal{L}_3 نجد وحسب خاصیة التعدي نجد \mathcal{L}_3 نجد وحسب خاصیة التعدی نجد \mathcal{L}_3



المحاضرة (8)



 $\neg\exists x_i \neg \alpha(x_i) \Longrightarrow \forall x_i \alpha(x_i)$: والآن بتبديل كل $\alpha(x_i)$ ب $\alpha(x_i)$ في الجملة الأخيرة نجد $\neg \alpha(x_i) \Longrightarrow \forall x_i \alpha(x_i)$ وبإزالة الأدلة نحد $\neg \alpha(x_i) \Longrightarrow \forall x_i \alpha(x_i)$

$$\mathcal{L}_7: \neg \forall x_i \alpha(x_i) \Longrightarrow \exists x_i \neg \alpha(x_i)$$

البرهان:

من $\exists x_i \neg \alpha(x_i) \Rightarrow \forall x_i \alpha(x_i)$ من \mathcal{L}_6 نجد: $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p))$ نجد: $(\neg \exists x_i \neg \alpha(x_i) \Rightarrow \forall x_i \alpha(x_i)) \Rightarrow (\neg \forall x_i \alpha(x_i) \Rightarrow \exists x_i \neg \alpha(x_i))$ وحسب قاعدة النزع نجد $\exists x_i \neg \alpha(x_i) \Rightarrow \exists x_i \neg \alpha(x_i) \Rightarrow \exists x_i \neg \alpha(x_i)$

$$\mathcal{L}_8$$
: $\exists x \neg \alpha(x) \equiv \neg \forall x \alpha(x)$

البرهان: يتم برهان ذلك من \mathcal{L}_5 و \mathcal{L}_7 واحدة في اقتضاء والأخرى في الاقتضاء المعاكس. (هنا تكافؤ (ذهاب وإياب)) مثال عليها: يوجد طالب لم يحضر هذا يكافئ أن ليس جميع الطلاب حاضرين.

$$\mathcal{L}_9$$
: $\forall x \ \alpha(x) \equiv \neg \exists x \ \neg \alpha(x)$

البرهان : مباشرة من \mathcal{L}_8 بأخذ النفي لطرفي التكافؤ أي بمعنى أن : $\exists x \neg \alpha(x) \equiv \neg \neg \forall x \ \alpha(x)$ ومنه يتم المطلوب. مثال عليها: لا يوجد طالب لم يحضر هذا يكافئ أن جميع الطلاب حاضرون.

$$\mathcal{L}_{10}: \neg \forall x \ \neg \alpha(x) \Longrightarrow \exists x \ \alpha(x)$$

. $\neg \alpha(x)$ ب $\alpha(x)$ ب وبتبديل كل المحاكس من \mathcal{L}_8 ب المحاكس من الاقتضاء المحاكس من

$$\mathcal{L}_{11}: \neg \exists x \ \alpha(x) \equiv \forall x \ \neg \alpha(x)$$

 $-\alpha(x)$ ب $\alpha(x)$ لكن بتبديل كل $\alpha(x)$ ب $\alpha(x)$ بالبرهان: نفس

مثال عليها: قولنا لا يوجد طالب حاضر للمحاضرة يكافئ قولنا إن جميع الطلاب حاضرون.

$$\mathcal{L}_{12}$$
: $\exists x \ \alpha(x) \equiv \neg \forall x \ \neg \alpha(x)$

 $\neg \alpha(x)$ بـ $\alpha(x)$ لكن بتبديل كل \mathcal{L}_8 بنفس البرهان: نفس

مثال عليها: ليس جميع الطلاب غائبين(غير حاضرين) يكافئ أنه يوجد طالب واحد على الأقل حاضر.

.: انتهت المحاضرة السابعة :.

2

الموقع الإلكتروني: Syria Math